

Máquina de Turing Multi-Head¹

Elenilton de Oliveira Ramos

elenilton.ramos@dce.ufpb.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - DCX
CURSO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO - SI

Abstract.

The Turing Machine represents a landmark in computing, and since its inception has been recognized as one of the most important elements for the study of theories involving languages and algorithms. His study in the field of Computer Theory allows the exploration of variations in several structural aspects. This work presents a modified Turing Machine obtained from the inclusion, particularly by the existence of more than one read and write head. This characteristic will be implemented and its behavior for a classical problem will be evaluated considering the aspects of computability and efficiency. The results obtained demonstrated the efficiency of the modification of the Multi-head Turing Machine.

Resumo.

A Máquina de Turing representa um marco da computação, sendo desde a sua criação, reconhecida com um dos elementos mais importantes para o estudo de teorias envolvendo linguagens e algoritmos. O seu estudo no âmbito da Teoria da Computação permite a exploração de variações em vários aspectos estruturais. Este trabalho apresenta uma Máquina de Turing modificada obtida a partir da inclusão, particularmente pela existência de mais de um cabeçote de leitura e gravação. Esta característica será implementada e seu comportamento para um problema clássico será avaliado considerando os aspectos de computabilidade e de eficiência. Os resultados obtidos demonstraram a eficiência da modificação da Máquina de Turing Multi-head.

¹ Trabalho de conclusão de curso (TCC), apresentado na modalidade Artigo, apresentado como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Licenciado em Ciências da Computação, pelo curso de Licenciatura em Ciências da Computação, oferecido pelo Centro de Ciências Aplicadas e Educação (CCA) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), sob a orientação do prof. Dr. Joelson Nogueira de Carvalho.

1. Introdução

Com a descoberta de Alan Turing, a Ciência da Computação deu seus primeiros passos rumo aos computadores modernos que conhecemos. “A ciência normalmente é cumulativa, isto é, constroem-se instrumentos mais poderosos, efetuam-se medidas mais exatas, precisam-se melhor e ampliam-se os conceitos das teorias, e assim por diante” (FONSECA FILHO, 2007 – pg.13). Não obstante a sua definição durante séculos ser concreta, a definição de algoritmo sempre foi utilizado e aperfeiçoado de forma implícita pela comunidade científica. “Durante o Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris no ano de 1900, David Hilbert apresentou 23 questões não resolvidas pertinentes à toda a sociedade matemática. Nesta lista o décimo problema dizia respeito aos algoritmos, usados ainda sem um conceito concreto, Hilbert requisitou explicitamente um algoritmo para a identificação de existência de raízes inteiras para um polinômio”(PASTORE MELLO, 2003– pg.2). Mesmo com o problema não resolvido, um grande avanço permitiu que ele fosse melhor analisado: a publicação da chamada Tese de Church-Turing, em 1936 chamado *On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem*. O artigo definia precisamente a noção de algoritmo que se fazia ausente até então e estava inviabilizando a continuidade do estudo na área.

Uma máquina de Turing (MT) é um dispositivo conceitual capaz de executar três operações fundamentais básica que são leitura, escrita e movimentação . A máquina possui uma fita formada por espaços com capacidade para armazenar um único símbolo, denominado célula; possui ainda um cabeçote que permite ler e escrever (ou sobre escrever) símbolos nas células da fita, que pode deslocar-se para a esquerda ou para a direita, uma célula por vez. Em qualquer instante da computação, o cabeçote está sobre uma célula da fita e a máquina encontra-se num certo estado interno. A operação da máquina é verificada pela mudança de estado em resposta à leitura do símbolo apontado, que imprime um novo símbolo na fita, na mesma célula. Porém, tanto o novo estado quanto o novo símbolo podem permanecer inalterados após a transição da máquina.

O proposto neste artigo trata de uma modificação na MT obtida pelo acréscimo de cabeçotes à máquina, trabalhando de forma independente aos demais, Neste sentido

demonstraremos como esta modificação pode facilitar a solução de alguns problemas, demonstrando isso para o problema clássico da identificação de palíndromos, onde pode ser obtida uma redução significativa no tempo de execução da máquina (número de transições efetuadas), em comparação com a utilização da versão original da MT. A identificação de palíndromos pertence à classe de problemas das palavras reversíveis; instâncias desse conceito são palavras ou frases que possuem a mesma sequência de símbolos (caracteres) , independentemente da sua ordem de leitura, tanto da direita para esquerda quanto da esquerda para a direita.

O texto se encontra dividido em cinco seções, iniciando pelo desenvolvimento dos conceitos teóricos da Máquina de Turing (MT); seguido pela construção de uma MT simples e pela apresentação de modificações ou variações da MT original; essa modificação, denotada pela inserção de outros cabeçotes será a base para o desenvolvimento de uma solução para o problema da identificação de palíndromos, através da qual, poderemos analisar a eficiência do modelo.

2. Máquina de Turing

2.1. Definição da Máquina de Turing

A Máquina de Turing é um mecanismo imaginário apoiado por uma teoria revolucionária do seu autor, o britânico Alan Mathison Turing, desenvolvida quando tinha 24 anos de idade; essa teoria foi publicada no ano de 1936, em um artigo por título de "*On Computable Numbers, with an Application on the Entscheidungs problem*", este artigo foi em resposta ao problema da decisão, formulado por Hilbert. Nesta época o jovem Alan Turing estudava em Nova Jersey-EUA na universidade de Princeton. Apesar do modelo da máquina de Turing não ter sido implantado fisicamente, na totalidade pelo seu autor, o processo computacional foi matematicamente demonstrado e provado no artigo. Turing explicitou um dispositivo lógico que ele chamou de "*automatic machine*" (ou "*a-machine*"), capaz de ler, escrever e apagar símbolos binários em uma fita de comprimento ilimitado e dividida por quadrados de igual tamanho. Um cabeçote de leitura/gravação se moveria em qualquer direção ao longo da fita, um quadrado por vez, e uma unidade de controle poderia interpretar uma lista de instruções simples, movendo-se para a direita ou esquerda. A regra executada determina o que se convencionou chamar de estado da máquina. "Qualquer processo aceito por

nós homens como um algoritmo é precisamente o que uma máquina de Turing pode fazer” (POZZA, 2002).

2.2. Estrutura da MT

A Máquina de Turing concebeu o fundamento estrutural básica para a ciência da computação moderna. Um dos mais consagrados autores na área de teoria da computação, Michael Sipser, observa que “Uma máquina de Turing pode fazer tudo que um computador real pode fazer” (SIPSER, 2006 – pg.137), reforçando a ideia de que qualquer computador digital é, em princípio, uma máquina de Turing. Tornou-se anos depois responsável, pelo Agradecimento a comunidade científica, declarando Turing com o título simbólico de “pai da computação” devido o desenvolvimento dos computadores modernos. O filósofo João Fernandes Teixeira cita:

[...] um estudante do King's College, em Cambridge, na Inglaterra, teve uma ideia para tentar resolver o chamado Problema de Hilbert, uma famosa questão matemática. Na mesma época, um grande debate entre os matemáticos de Princeton, nos Estados Unidos, levava ao aparecimento de um novo tipo de cálculo lógico, criado para fornecer uma base matemática para a ideia de realizar uma computação. Estas duas iniciativas diferentes formaram as bases para o que mais tarde ficou conhecido como “ciência da computação”. Dez anos mais tarde, John Von Neumann decidiu usar essas ideias para, efetivamente, construir os primeiros computadores modernos (Teixeira, 1998 - p.20).

A máquina de Turing é um modelo conceitual, capaz de descrever qualquer algoritmo; é constituída basicamente dos seguintes elementos:

1. Uma fita que é dividida quadrícula chamado célula não indexadas, uma ao lado da outra. Assim, elas devem ser exploradas sequencialmente, uma após a outra. É Assumido que o quadrícula de células que estão vazias, estão preenchidas com o símbolo branco (representação simbólica \square). Cada célula tem um símbolo de algum alfabeto finito.
2. Um cabeçote, que pode ler e escrever símbolos na fita e deslocar-se para a esquerda ou para a direita (representação simbólica \triangle). Assim definido pela tabela de transição também conhecido de função de transição .
3. Uma função de transição que basicamente diz à máquina qual símbolo escrever, em que direção mover o cabeçote sendo direita ou esquerda, qual seu novo estado será a partir do símbolo apresentado no cabeçote e do estado

em que se encontra. Se não houver entrada alguma na tabela para a combinação atual de símbolo e estado então a máquina para.

- Um registrador de estados, que guarda o estado da máquina. O número de estados diferentes é sempre finito e há um estado especial denominado “estado inicial” com o qual o registrador de estado é inicializado.

Quanto à sua aplicação, existem três maneiras distintas para abordar o estudo das Máquinas de Turing; elas podem ser utilizadas para:

- Processar Funções. Funções computáveis e suas propriedades;
- Reconhecer Linguagens. Linguagens que podem ser reconhecidas e suas propriedades;
- Solucionar Problemas. Problemas solucionáveis e não-solucionáveis, problemas parcialmente solucionáveis (computáveis) e completamente insolúveis (não computáveis).

Assim, uma MT pode ser utilizada em várias aplicações; como identificar algoritmos (procedimentos efetivos), reconhecer linguagens de programação pertencentes aos mais altos níveis de abstração da hierarquia de Chomsky e solucionar problemas diversos, incluindo o seu uso como um transdutor, similar aos computadores digitais atuais.

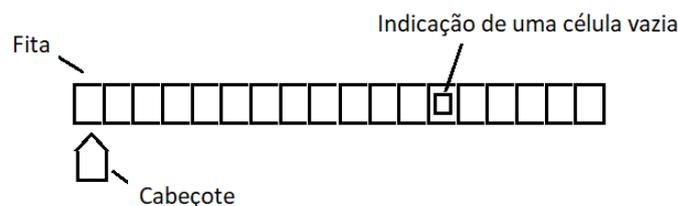


Figura 1 - A estrutura da MT original; fonte: Elaborado pelo Autor.

Além da estrutura “física”, a MT incorpora os seguintes componentes:

- Q = Conjunto de estados, que inclui o estado inicial q_0)
- Σ = Alfabeto de entrada (não contém o símbolo em branco “•”)
- \wp = O alfabeto da fita, onde $\{ \bullet \} \in \wp$ e $\Sigma \subseteq \wp$
- ${}^{\text{TM}} = Q \cdot \wp \rightarrow Q \cdot \wp \cdot \{L,R\}$

Dependendo da sua aplicação, o conjunto de estados pode ser estendido; por exemplo, para o reconhecimento de linguagens, onde a MT emula autômatos reconhecedores, os estados q_{aceita} = Estado de rejeição e $q_{rejeita}$ = Estado de aceitação seriam incluídos.

2.3. Exemplo de uma MT

Uma MT que aceita uma quantidade qualquer de 0 seguidos de uma quantidade qualquer de 1 denotado por $L = \{0^*1^*\}$. A ideia é deslocar para direita enquanto for 0 até a extremidade direita da fita, ou até encontrar 1 até a extremidade da fita.

Solução:

$$M=(\Sigma,\Theta,\varphi,^{\text{TM}},\theta_0,\Phi,\bullet,\bullet)$$

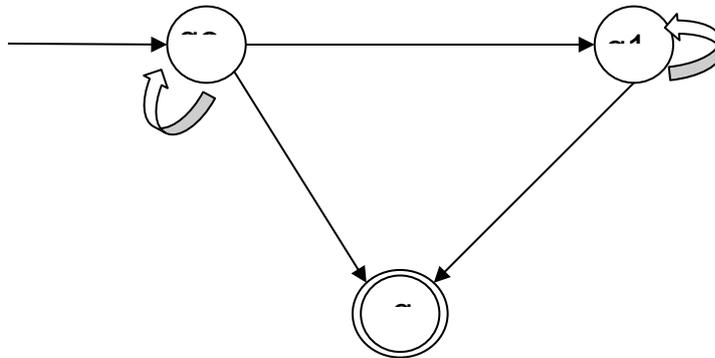


Figura 2- Grafo de uma máquina que pode receber uma sequência de zeros e após uma sequência de uns. fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela 1 - Transição da MT; fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela de transição	
$\delta(q_0,0)$	$(q_0,0,D)$
$\delta(q_0,1)$	$(q_1,1,D)$
$\delta(q_1,1)$	$(q_1,1,D)$
$\delta(q_0,>)$	$(q_2,>,E)$
$\delta(q_1,>)$	$(q_2,>,E)$

3. Modificações sobre a MT

Na seção 2.2 foi definido um modelo da MT; nesta subseção serão apresentadas possíveis variações desse modelo, as quais são alternativas válidas que preservam os fundamentos teóricos da máquina. Segundo Minsky (1967), essas alternativas não aumentam o poder computacional das máquinas, independentemente da estrutura específica escolhida para tal, entretanto, dependendo do contexto, pode ser mais

conveniente utilizar um ou outro modelo, pois a variação pode representar uma diminuição significativa no número de transições que a MT deve produzir para solucionar determinado problema.

A Cada Modificação a um acréscimo em relação a Máquina de Turing original. Ressalto ainda que as variações elencados a seguir não findam as possibilidades, mas são suficientes para comentar o poder computacional da Máquina de Turing.

As variações são listadas a seguir:

- Com múltiplos cabeçotes - o modelo com esta modificação possui k cabeças de leitura e gravação sobre uma única fita. Cada cabeçote possui o movimento independente. Com isso, o processamento Depende do estado corrente e do símbolo lido em cada uma dos cabeçotes.
- Com fita infinita à esquerda e à direita - esse modelo permite que a fita seja infinita dos dois lados.
- Com múltiplas fitas - esse modelo possui k fitas infinitas à esquerda e à direita e k correspondentes cabeças de fita;
- Com múltiplas fitas e múltiplas unidades de controle - em alguns trabalhos esse modelo é formalmente definida como uma TM não-determinística com uma única fita (VAN EMDE BOAS, 1990);

Existe ainda outras variações, como a Máquina de Turing com fita limitada (MENESES, 2001), que também é uma modificação sob a máquina original; Porém, esse modelo restringe o tamanho da fita, saindo do escopo do trabalho aqui apresentado. Ressalta-se ainda que a MTFL é menos poderosa que a TM de acordo com a hierarquia de Chomsky, reconhece a classe de linguagem sensível ao contexto. Outra observação válida a qual é ainda uma questão em aberto na teoria da Computação clássica, ou não determinismo aumenta ou não o poder computacional MTFL.

3.1. A MT Multi-Head

A MT Multi-Head é uma variação da MT original, onde existem não apenas um, mas múltiplos cabeçotes; o modelo descrito neste trabalho possui dois cabeçotes sobre uma única fita. Cada cabeçote possui o movimento independente. Com isso, o processamento depende do estado corrente e do símbolo lido em cada uma dos cabeçotes. Embora a MT Multi-head seja mencionada como modelo válido de

modificação, sua implementação em aplicações práticas ainda é bastante escassa; aqui, será implementada a implementação do reconhecimento de palíndromos, afim de demonstrar a redução da complexidade da resolução deste problema, em relação à uma MT original. A figura 3 apresenta uma ilustração de uma MT contendo dois cabeçotes de leitura/escrita .

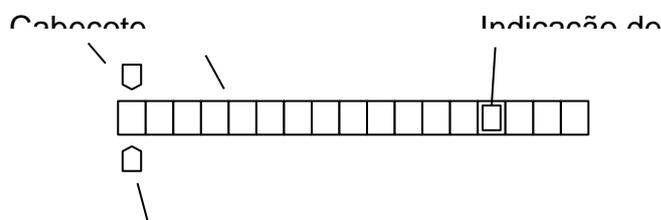


Figura 3 - Estrutura da máquina de Turing Multi-head, Composto por dois cabeçotes. Fonte: Elaborado pelo Autor.

3.2. A estrutura da MT Multi-Head

Além da estrutura “física”, a MT Multi-head incorpora os seguintes componentes:

- Q = Conjunto de estados, que inclui o estado inicial q_0)
- Σ = Alfabeto de entrada (não contém o símbolo em branco “•”)
- \wp = O alfabeto da fita, onde $\{ \bullet \} \in \wp$ e $\Sigma \subseteq \wp$
- ${}^m = Q \cdot \wp_1 \cdot \wp_2 \rightarrow Q \cdot \wp_1 \cdot \wp_2 \cdot \dots \cdot \otimes \wp_1 \cdot \otimes \wp_2 \cdot \dots \{L,R\}$

Agora será demonstrada a utilização deste conceito em uma MT com dois cabeçotes na resolução de um palíndromo e posterior a isso demonstraremos sua eficiência com comparativo a abordagem tradicional de uma Máquina de turing .

Um palíndromo é uma palavra ou frase que possui a mesma sequência de letras em qualquer ordem de leitura, da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda. O palíndromo mais antigo do mundo é a frase em latim “Sator arepo tenet opera rotas”, que significa “O lavrador diligente conhece a rota do arado” e foi criado entre os séculos 2 e 5 (CARNEIRO, 2014). São ainda exemplos de palíndromos:

- “Socorram-me, subi no ônibus em Marrocos” (VARGAS, 2018 - pg. 163-184).
- “Lá vou eu em meu eu oval” (WISNIK, 2005 - pg. 248-256).
- “A grama é amarga” (DIAS-ARIEIRA, 2007 pg. 46-53)

Acentos, cedilhas e sinais de pontuação não são considerados para a inversão ou comparativo.

3.3. Funcionamento da MT Multi-Head para o problema do reconhecimento de palíndromos:

O funcionamento da MT proposta segue o seguinte esquema:

1. Inicialmente, o primeiro cabeçote é deslocado para direita até a extremidade e retorna, para uma célula anterior, correspondendo ao último caractere.
2. O segundo cabeçote inicia quando no estado q_1 (início da comparação entre os símbolos).
3. A partir de então, tanto o primeiro cabeçote quanto o segundo se movem em direções opostas, convergindo para o centro da palavra/frase; isso enquanto os caracteres forem iguais; quando são divergentes, entrarão em um estado de erro.
4. Para entrar em um estado de aceitação, os cabeçotes percorreram a fita, até que finalmente se encontrem em uma célula, ou que se estejam em células adjacentes, sem que entrem num estado de erro.

Cada transição da Máquina de Turing pode ser associada a uma mensagem, para que a função da transição não seja perdida pelo programador ao longo do desenvolvimento da função programa; esse recurso não é obrigatório, nem consta na estrutura da Máquina de Turing, mas constitui-se num artifício bastante prático!

Tabela 2 - Tabela de transição de palíndromo para o alfabeto "a" e "b" com dois cabeçotes; Fonte: Elaborada pelo Autor.

$Q \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Delta\Gamma_1 \times \Delta\Gamma_2$	MENSAGENS
$q_0 \times - \times a \rightarrow q_0 \times - \times a \times - \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma_2 = a$, laço
$q_0 \times - \times b \rightarrow q_0 \times - \times b \times - \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma_2 = b$, laço
$q_0 \times - \times \square \rightarrow q_1 \times - \times \square \times - \times \leftarrow$	Estado Final, aponta para última posição, estado = q_1
$q_1 \times a \times a \rightarrow q_1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma_1 = a$ e $\Gamma_2 = a$
$q_1 \times a \times b \rightarrow q_E \times - \times - \times - \times - \times -$	Estado de erro com $\Gamma_1 = a$ e $\Gamma_2 = b$
$q_1 \times b \times a \rightarrow q_E \times - \times - \times - \times - \times -$	Estado de erro com $\Gamma_1 = b$ e $\Gamma_2 = a$
$q_1 \times b \times b \rightarrow q_1 \times - \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma_1 = b$ e $\Gamma_2 = b$

$q1 \times \square \times \square \rightarrow qA \times - \times - \times$ $\leftarrow \times \rightarrow$	Estado final de Acerto $\Gamma 1 = \square$ e $\Gamma 2 = \square$
---	---

Funcionamento da MT - Tradicional para o problema do reconhecimento de palíndromos:

1. Inicialmente a ideia é identificar o primeiro símbolo, marca-lo como lido e em seguida, deslocar-se para última posição não vazia.
2. Se a última posição for igual a símbolo a qual foi sobrescrito no início da fita contínua, se for branco vai para um estado de aceitação, se for diferente é rejeitado.
3. Neste momento tanto o primeiro cabeçote quanto o segundo se movem em direções opostas (convergentes) enquanto valores forem iguais, se forem diferentes entraram em um estado de erro e a MT para seu funcionamento.
4. O processamento segue, até que o cabeçote encontre apenas marcadores em qualquer sentido em que se desloque.

Tabela 3 - Transições da MT original para a identificação de Palíndromos; Fonte: Elaborada pelo Autor.

$Q \times \Gamma 1 \rightarrow Q \times \Gamma 1 \times \Delta \Gamma 1$	MENSAGENS
$q0 \times b \rightarrow q1 \times \square \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma = b$
$q0 \times a \rightarrow q4 \times \square \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma = a$
$q0 \times \square \rightarrow qa \times \square \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, conotando Estado de aceite
$q1 \times b \rightarrow q1 \times b \times \rightarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = b$
$q1 \times a \rightarrow q1 \times a \times \rightarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = a$
$q1 \times \square \rightarrow q2 \times \square \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, cotando fim dos caracteres a direita.
$q2 \times \square \rightarrow qA \times \square \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, conotando Estado de aceite por se tratar de um número ímpar
$q2 \times b \rightarrow q3 \times \square \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma = b$ significando que existe par correspondente.
$q2 \times a \rightarrow qE \times a \times -$	Estado com $\Gamma = a$ significando que não existe par que corresponda.
$q3 \times b \rightarrow q3 \times b \times \leftarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = b$
$q3 \times a \rightarrow q3 \times a \times \leftarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = a$
$q3 \times \square \rightarrow q0 \times \square \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, cotando fim dos caracteres a esquerda.
$q4 \times b \rightarrow q4 \times b \times \rightarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = b$

$q4 \times a \rightarrow q4 \times a \times \rightarrow$	Estado de Laço para $\Gamma = a$
$q4 \times \square \rightarrow q5 \times \square \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, cotando fim dos caracteres a direita.
$q5 \times \square \rightarrow qA \times \square \times \rightarrow$	Estado com $\Gamma = \square$, conotando Estado de aceite por se tratar de um número ímpar
$q5 \times a \rightarrow q3 \times \square \times \leftarrow$	Estado com $\Gamma = b$ significando que existe par correspondente.
$q5 \times b \rightarrow qE \times b \times -$	Estado com $\Gamma = a$ significando que não existe par que corresponda.

Ao implementar a MT original, o número de estados mais do que dobram na tabela programa em relação à implementação MT - Multi-Head; isso configura uma significativa redução no número de transições para a MT Multi-Head, que pode ser então caracterizado como mais eficiente em termos computacionais. Mas para mensurar a eficiência e comprovar tal suposição, será avaliado o funcionamento das MTs para uma entrada.

Suponha que seja dado o palíndromo de entrada de “ababa” tanto com Multi-Head, quanto com o modelo tradicional.

Tabela 4 - Tabela transição para a entrada “ababa” com Multi-Head; Fonte: O Autor.

Deslocamento	$Q \times \Gamma1 \times \Gamma2 \rightarrow Q \times \Gamma1 \times \Gamma2 \times \Delta\Gamma1 \times \Delta\Gamma2$
1	$q0 \times - \times a \rightarrow q0 \times - \times a \times - \times \rightarrow$
2	$q0 \times - \times a \rightarrow q0 \times - \times b \times - \times \rightarrow$
3	$q0 \times - \times a \rightarrow q0 \times - \times a \times - \times \rightarrow$
4	$q0 \times - \times a \rightarrow q0 \times - \times b \times - \times \rightarrow$
5	$q0 \times - \times a \rightarrow q0 \times - \times a \times - \times \rightarrow$
6	$q0 \times - \times \square \rightarrow q1 \times - \times \square \times - \times \leftarrow$
7	$q1 \times a \times a \rightarrow q1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$
8	$q1 \times b \times b \rightarrow q1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$
9	$q1 \times a \times a \rightarrow q1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$
10	$q1 \times b \times b \rightarrow q1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$
11	$q1 \times a \times a \rightarrow q1 \times - \times - \times \rightarrow \times \leftarrow$
12	$q1 \times \square \times \square \rightarrow qA \times - \times - \times \leftarrow \times \rightarrow$

Tabela 5 - Tabela transição para a entrada "ababa" com Modelo tradicional. Fonte: Elaborada pelo Autor.

Deslocamento	$Q \times \Gamma^1 \rightarrow Q \times \Gamma^1 \times \Delta\Gamma^1$
1	$q_0 \times a \rightarrow q_4 \times \square \times \rightarrow$
2	$q_4 \times b \rightarrow q_4 \times b \times \rightarrow$
3	$q_4 \times a \rightarrow q_4 \times a \times \rightarrow$
4	$q_4 \times b \rightarrow q_4 \times b \times \rightarrow$
5	$q_4 \times a \rightarrow q_4 \times a \times \rightarrow$
6	$q_4 \times \square \rightarrow q_5 \times \square \times \leftarrow$
7	$q_5 \times a \rightarrow q_3 \times \square \times \leftarrow$
8	$q_3 \times b \rightarrow q_3 \times b \times \leftarrow$
9	$q_3 \times a \rightarrow q_3 \times a \times \leftarrow$
10	$q_3 \times b \rightarrow q_3 \times b \times \leftarrow$
11	$q_3 \times \square \rightarrow q_0 \times \square \times \rightarrow$
12	$q_0 \times b \rightarrow q_1 \times \square \times \rightarrow$
13	$q_1 \times a \rightarrow q_1 \times a \times \rightarrow$
14	$q_1 \times b \rightarrow q_1 \times b \times \rightarrow$
15	$q_1 \times \square \rightarrow q_2 \times \square \times \leftarrow$
16	$q_2 \times b \rightarrow q_3 \times \square \times \leftarrow$
17	$q_3 \times a \rightarrow q_3 \times a \times \leftarrow$
18	$q_3 \times \square \rightarrow q_0 \times \square \times \rightarrow$
19	$q_0 \times a \rightarrow q_4 \times \square \times \rightarrow$
20	$q_4 \times \square \rightarrow q_5 \times \square \times \leftarrow$
21	$q_5 \times \square \rightarrow q_A \times \square \times \rightarrow$

Acompanhando a Tabela 3, pode ser observado que com aplicação da Máquina de Turing Multi-head, o número de deslocamentos foi igual a 12, enquanto com a abordagem original verificado na tabela 4, esse número sobe para 21 deslocamentos. Isso significa que o modelo Multi-Head, neste exemplo com 2 cabeçotes, possui uma melhor eficiência em tempo de deslocamento, realizando a mesma tarefa com uma redução de transições para 57% em relação ao modelo original; isso demonstra a eficiência do modelo em relação ao original. Com os resultados obtidos, podemos extrapolar a aplicação para entradas de tamanhos diversos, mantendo a mesma

proporção de transições, deduzindo portanto a maior eficiência da MT Multi-head em relação à MT tradicional, aplicada ao problema das linguagens reversíveis.

4. Considerações finais

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise de como a inclusão de um segundo cabeçote no modelo em relação a abordagem original da máquina de turing possibilita ganho de eficiência devido ao tempo de deslocamento (redução de transição). Além disso, também permitiu uma aplicação do conceito multi-head que se faz presente na literatura no entanto até então se fazia inexistente.

Com decorrer do trabalho vislumbrou se diversas possibilidades para trabalhos futuros, podendo aplicar a Máquina de Turing Multi-Head em outros problemas verificando assim a sua possível eficiência, também podemos aplicar outras modificação da Máquina de Turing como por exemplo com múltiplas fitas e múltiplas cabeçotes no exemplo aqui apresentado de palíndromo verificando assim se houve um ganho ou uma perda de eficiência em relação ao modelo aqui apresentado. Portanto verificamos que este trabalho não se trata apenas de mas um estudo mas algo que abre possibilidades para diversos outros estudos relacionados.

5. Referências Bibliográficas

- CARNEIRO, Raquel - **O que é um Palíndromo** - Coluna Mundo Estranho - Revista Superinteressante, Publicado em 12 março 2014.
- FONSECA FILHO, Clézio - **História dos computadores**- O caminho do pensamento e da tecnologia. / Clézio Fonseca Filho. - Porto Alegre; ediPUCRS 2007. p. 09
- GUREVICH 2000, Yuri Gurevich “Sequential abstract State Machine Capture sequential Algorithms”, ACM Transaction on Computational Logic 1, to appear.
- SIPSER, M.: **Introduction to the Theory of Computation**, Thomson Course Technology Ed., Boston, MS, 2006.
- TEIXEIRA, João F.:**Mentes e máquinas – Uma Introdução à Ciência Cognitiva**. Ed. Artes Médicas, São Paulo, 1998.
- MINSKY, M. L. **Computation: Finite and infinite machines**. Englewood cliffs: Prentice Hall, 1967
- MENESES, P. B **Linguagens Formais e Autômatos**. 4.ed. Porto Alegre:Sagra Luzzatto,2001.(Livros Didáticos, v.3)
- VAN EMDE BOAS, P. Machine Models and Simulations. In:leeuwen, j.van(Ed). **Handbook of Theoretical Computer Science**. Amsterdam:Elsevier Science, 1990. v.A,p.1-66.

VARGAS, Fábio Aristimunho. ABC das traduções brasileiras do Ulysses de James Joyce. **Cadernos de Tradução**, v. 38, n. 2, p. 163-184, 2018

PASTORE MELLO, José Luiz - Folha de São Paulo - **O décimo problema de Hilbert**, 2003. [Internet] Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0409200313.htm>>, Acesso em :15/08/2018

POZZA, Osvaldo Antonio; PENOSO, Sérgio - **A Máquina de Turing** - Mestrado em Ciência da computação, Universidade Federal de Santa Catarina - Santa Catarina, 2002.

LOFF, Bruno - A tese de Church–Turing - **Centrum voor Wiskunde en Informatica**. Amsterdão, Holanda. pp. 69 Boletim da SPM 67, Outubro 2012

WISNIK, José Miguel. Te-manduco-não-manduca: a música popular de São Paulo. **Literatura e Sociedade**, n. 8, p. 248-256, 2005.

DIAS-ARIEIRA, Cláudia R.; MORITA, Daniela AS; MACHADO, Maria H. Nematóides associados a plantas ornamentais em viveiros do Paraná. **Nematologia Brasileira**, v. 31, n. 1, p. 46-53, 2007.